КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

1(29). Вычислить неопределенные интегралы. Правильность вычисления проверить путем дифференцирования.

$$\text{а) } \int \frac{\left(2\sqrt{x}-3\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx\,; \quad \text{б) } \int 6\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx\,; \quad \text{в) } \int \frac{1+4x-2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Решение. а) Раскрываем скобки в числителе, выполняем почленное деление на знаменатель; далее используем свойство линейности

$$\int\left(\lambda_1 f_1(x)\,dx+\lambda_2 f_2(x)\,dx+\ldots+\lambda_m f_m(x)\,dx\right)=\lambda_1\int f_1(x)\,dx+\lambda_2\int f_2(x)\,dx+\ldots\lambda_m\int f_m(x)\,dx\,.$$

Четыре полученных интеграла вычисляем по таблице:

$$\int dx = x + C\,,$$

$$\int x^s\,dx=\frac{x^s+1}{s+1}+C \qquad (x\neq -1)\,.$$

$$\int \frac{\left(2\sqrt{x}-3\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{8x\sqrt{x}-3\cdot 4\cdot 3x+3\cdot 9\cdot 2\sqrt{x}-27}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\int\left(8x-36\sqrt{x}+54-\frac{27}{\sqrt{x}}\right)dx=8\int x\,dx-36\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+54\int dx-27\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=8\cdot\frac{x^2}{2}-36\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+54x-27\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C=\ldots\ .$$

Ответ: $4x^2-24x\sqrt{x}+54x-54\sqrt{x}+C$.

Проверка: $\left(4x^2-24x^{\frac{3}{2}}+54x-54x^{\frac{1}{2}}\right)'=8x-24\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+54-54\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$

$=8x-36\sqrt{x}+54-\dfrac{27}{\sqrt{x}}=\dfrac{8x\sqrt{x}-36x+54\sqrt{x}-27}{\sqrt{x}}=\dfrac{\left(2\sqrt{x}-3\right)^3}{\sqrt{x}}$ что и требовалось доказать (так как $\int f(x)\,dx=F(x)+C \;\Leftrightarrow\; F'(x)=f(x)$).

б) По свойству интеграла: если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то

$$\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C\,,$$

имеем:

$$\int 6\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx=-6\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+C$$

(использован также табличный $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$).

Ответ: $-12\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)+C$.

Проверка: $\left(-12\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right)' = -12\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ что и требовалось доказать.

в) После почленного деления, по свойству линейности – аналогично а) получаем

$$\int\frac{1+4x-2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx = \int\frac{dx}{1+x^2}+2\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}-2\int\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{1+x^2}.$$

Первый интеграл – табличный: $\int\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C_1$. Два следующих берутся способом подведения под знак дифференциала:

$$2xdx = dx^2 = d\left(x^2+1\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg}x\right):$$

$$\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int\frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right)+C_2 \qquad \left(\int\frac{du}{u} = \ln|u|+C\right).$$

$$\int\frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{1+x^2} = \int\operatorname{arctg}x\,d\left(\operatorname{arctg}x\right) = \frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+C_3 \qquad \left(\int u\,du = \frac{u^2}{2}+C\right).$$

Окончательно получим

ответ: $\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}^2x + 2\ln\left(1+x^2\right)+C$.

Проверка:

$\left(\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}^2x + 2\ln(1+x^2)\right)' = \frac{1}{1+x^2}-\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+\frac{2\cdot 2x}{1+x^2} = \frac{1-2\operatorname{arctg}x+4x}{1+x^2}$, что требовалось доказать.

2(30). Вычислить интеграл $\int x^2\sin 2x\,dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv - uv - \int v\,du,$$

полагая

$$u = x^2, \qquad du = 2xdx,$$

$$dv = \sin 2x\,dx, \qquad v = \int\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x,$$

тогда

$$\int x^2\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x - \left(-\frac{1}{2}\int 2x\cos 2x\,dx\right) = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx.$$

Последний интеграл также берется по частям:

$$u = x \qquad u = x, \qquad du = dx,$$

$$dv = \cos 2xdx \qquad dv = \cos 2xdx, \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$\int x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x\sin 2xdx-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\,.$$

Окончательно

$$\int x^2\sin 2x\,dx=-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\,.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(1-2x^2\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C$.

3(31). Вычислить интеграл $\int \frac{5x-2}{\sqrt{3+6x-x^2}}\,dx$.

Решение. Выделим точный квадрат в подкоренном выражении знаменателя:

$$-x^2+6x+3=-\left(x^2-6x+9\right)+3+9=12-\left(x-3\right)^2.$$

В числителе выделим двучлен $x-3$:

$$5x-2=5x-15+15-2=5\left(x-3\right)+13\,.$$

Запишем данный интеграл в виде

$$\int \frac{5\left(x-3\right)+13}{\sqrt{12-\left(x-3\right)^2}}\,dx=5\int \frac{x-3}{\sqrt{12-\left(x-3\right)^2}}\,dx+13\int \frac{dx}{\sqrt{12-\left(x-3\right)^2}}=$$

(сделаем подстановку: $x-3=t$; $dx=dt$)

$$=5\int \frac{t\,dt}{\sqrt{12-t^2}}+13\int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}}\,.$$

Так как $tdt=\frac{1}{2}dt^2$ (аналогично примеру 1в) $=-\frac{1}{2}d\left(12-t^2\right)$, то первый интеграл имеет вид

$$5\int \frac{t\,dt}{\sqrt{12-t^2}}=-\frac{5}{2}\int \frac{d\left(12-t^2\right)}{\sqrt{12-t^2}}=\left(\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C\right)=-5\sqrt{12-t^2}+C_1\,.$$

Второй интеграл – табличный: $13\int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}}=13\arcsin \frac{t}{\sqrt{12}}+C_2$.

Возвращаемся к переменной x, записываем

ответ: $-5\sqrt{12-\left(x-3\right)^2}+13\arcsin \frac{x-3}{\sqrt{12}}+C$.

4(32). Вычислить интеграл $\int \frac{x^4-1}{x^3+8}\,dx$.

Решение. Неправильную дробь под знаком интеграла представим в виде суммы многочлена и правильной дроби; для этого нужно выполнить деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4-1 \\ x^4+8x \end{array} & \underline{x^3+8} \\
\overline{\quad -8x-1} & x
\end{array}
$$

Таким образом, $\dfrac{x^4-1}{x^3+8}=x-\dfrac{8x+1}{x^3+8}$,

$$\int\frac{x^4-1}{x^3+3}\,dx=\int x\,dx-\int\frac{8x+1}{x^3+8}\,dx\,. \tag{$*$}$$

Для вычисления интеграла от правильной дроби раскладываем знаменатель на множители и применяем метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{8x+1}{x^3+8}=\frac{8x+1}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}\,. \tag{$**$}$$

После приведения к общему знаменателю приравниваем числители (в правой и левой части):

$$A\left(x^2-2x+4\right)+B\left(x^2+2x\right)+C\,(x+2)=8x+1\,.$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части и получаем систему для определения A, B, C:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A+B=0 \\ x: & -2A+2B+C=8 \\ x^o: & 4A+2C=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -4A+C=8 \\ 4A+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 3C=9 \\ 4A=1-2C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ A=-\dfrac{5}{4} \\ B=\dfrac{5}{4} \end{cases}. \tag{$***$}$$

Возвращаясь к ($*$), имеем с учетом ($**$) и ($***$)

$$\int\frac{x^4-1}{x^3+8}\,dx=\int x\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{\frac{5}{4}x+3}{x^2-2x+4}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\int\frac{d\,(x+2)}{x+2}-\int\frac{\frac{5}{4}(x-1)+\frac{5}{4}+3}{(x-1)^2+3}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\ln|x+2|-\frac{5}{4}\int\frac{x-1}{(x-1)^2+3}\,d\,(x-1)-\frac{17}{4}\int\frac{d\,(x-1)}{(x-1)^2+3}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\ln|x+2|-\frac{5}{8}\ln\left((x-1)^2+3\right)-\frac{17}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

(При вычислении двух последних интегралов использованы формулы

$$\int \frac{u\,du}{u^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left(u^2+3\right), \quad \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} \quad \left(u = x-1,\ a = \sqrt{3}\right)).$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{4}\ln|x+2| - \dfrac{5}{8}\ln\left(x^2-2x+4\right) - \dfrac{17}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}} + C$.

5(33). Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^2 x\,dx$; б) $\int\limits_{-20}^{20} x^5 \ln\left(1+x^2\right) dx$; в) $\int\limits_{-2}^{0} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+4}\,dx$.

Решение. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^2 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos^3 x\,dx = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,d\left(\cos x\right) =$

$= -2\cdot\dfrac{\cos^4 x}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\cos^4 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \dfrac{1}{2}$. (После использования формулы для $\sin 2\alpha$ и подведения под знак дифференциала применили формулу Ньютона–Лейбница).

б) Заметим, что функция под знаком интеграла – нечетная. $f(-x) = -x^5\ln\left(1+(-x)^2\right) = -f\left(x\right)$. По свойству интеграла в симметричных (относительно $x=0$) пределах от нечетной функции $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. Поэтому интеграл равен нулю.

в) Применяем формулу замены переменной в определенном интеграле. Полагаем $x+3=t^2$, $t=\sqrt{x+3}$, $x=t^2-3$, $dx=2tdt$; при $x=-2$ $t=1$, при $x=0$ $t=\sqrt{3}$. Имеем

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+4}\,dt = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{2\left(t-1\right)t\,dt}{t^2+1} = 2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{t^2-t+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{3}-1\right) - \left(\ln 4 - \ln 2\right) - 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}1\right) = 2\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 2 - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 2 - \frac{\pi}{16}.$$

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$; б) 0; в) $2\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln 2 - \dfrac{\pi}{16}$.

6(34). Найти площадь, ограниченную параболой $y = \frac{1}{2}x\left(4-x\right)$, касательной к ней в точке с абсциссой $x = 4$ и осью Oy. Сделать чертеж.

Решение. Составим уравнение касательной

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x-4\right).$$

В нашем случае $x_0 = 4$, $y_0 = 0$, $y' = 2 - x$, $f'\left(x_0\right) = 2 - 4 = -2$, уравнение касательной $y = -2\left(x-4\right)$. Изобразим фигуру, заданную в условии, на чертеже (рис. 19).

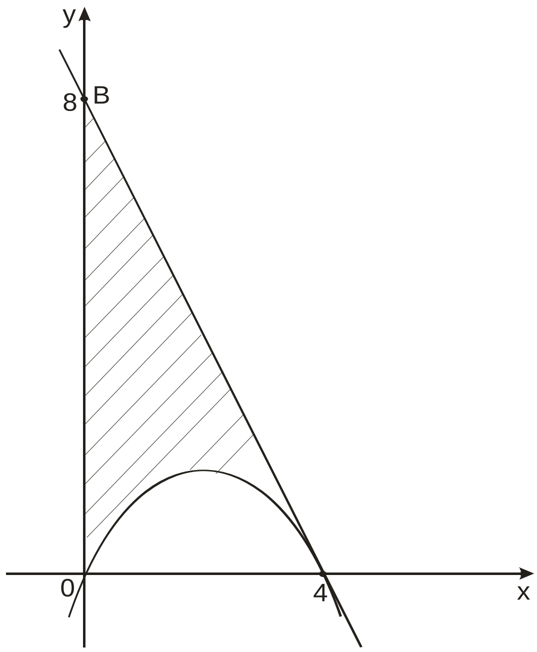

Рис. 19

Искомая площадь заключена между прямыми $x = 0$, $x = 4$ и графиками функций $y = f_1\left(x\right) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(4-x\right)$ – парабола, $y = f_2\left(x\right) = -2\left(x-4\right)$ – касательная, при этом $f_1\left(x\right) \le f_2\left(x\right)$. Применяя формулу для площади $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$, находим:

$$S = \int\limits_0^4 \left(-2(x-4) - \frac{1}{2}x(4-x)\right)dx = \int\limits_0^4 \left(8 - 4x + \frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(16 - 8x + x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(x-4\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x-4\right)^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

Замечание. Требуемую площадь можно найти, вычитая из площади треугольника OAB (она равна 16) площадь под параболой, которая равна интегралу $\int\limits_0^4 \frac{1}{2}x\left(4-x\right)dx = \frac{16}{3}$. Следует иметь в виду, что далеко не во всех задачах такой прием оказывается более выгодным.

7(35). Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\sqrt{x}\sin x$, $x\in[0,\pi]$ вокруг оси Ox.

Решение. По формуле объема тела вращения $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ имеем

$$V=\pi\int\limits_0^\pi x\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi x\left(1-\cos 2x\right)dx.$$

Вычисляем интеграл по частям: $\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\left(1-\cos 2x\right)dx & v=x-\frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$. (Формула $\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du$.)

$$V=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi x\left(1-\cos 2x\right)dx=\frac{\pi}{2}\left(x\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi-\int\limits_0^\pi\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\pi^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^\pi\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^3}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{4}$.

8(36). Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^2}$. Что можно сказать о сходимости интеграла $\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^k}$?

Решение. По определению несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ имеем:

$$\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_e^b\frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

Найдем $\int\limits_e^b\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\limits_e^b\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_e^b=\frac{1}{\ln e}-\frac{1}{\ln b}=1-\frac{1}{\ln b}$. Тогда

$$\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{\ln b}\right)=1-0=1.$$

Рассматривая аналогичным образом интеграл

$$\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^k}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_e^b\frac{d\ln x}{\left(\ln x\right)^k}=\left|\ln x=u\right|=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{\ln b}\frac{du}{u^k},$$

получаем несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{du}{u^k}$, о котором известно, что он сходится при $k > 1$ и расходится при $k \leq 1$ (доказательство аналогично рассмотренному выше – см. учебник).

Ответ: $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = 1$ (сходящийся). $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ сходится при $k > 1$, расходится при $k \leq 1$.