КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

1(19). Проверить, что функция $y=\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{x}{2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $2yy'=-e^{-x}\left(x-1\right)^2$.

Решение. Найдем производную y', применив правила дифференцирования произведения $\left(uv\right)'=u'v+uv'$, суммы $\left(u+v\right)'=u'+v'$ и сложной функции $\left(f\left(u(x)\right)\right)'_x=f'_u\cdot u'_x$, а также формулы

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}},\quad e^{u(x)}=e^u u'.$$

$$y'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{x^2+1}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{x}{2}}.$$

Упростим: $y'=\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(2x-x^2-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}\left(x-1\right)^2}{2\sqrt{x^2+1}}$. Подставляя y и y' в данное уравнение, имеем:

$$2\sqrt{x^2+1}\,e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{e^{-\frac{x}{2}}\left(x-1\right)^2}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=-e^{-x}\left(x-1\right)^2,$$

что требовалось доказать.

2(20). Найти производные следующих функций (а), (б), (в). Вычислить, там, где указано, значения производных в данных точках:

а) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$, $f'(1)$; б) $f(x)=\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{10^x-1}{10^x+1}$; в) $s(t)=2t\arcsin\sqrt{t}$, $s''\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Используем основные правила дифференцирования, приведенные в предыдущем примере, правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, таблицу производных основных элементарных функций.

а) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\left(1+x^2\right)-2x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Подставляя $x=1$, найдем $f'(1)=\dfrac{2-2\cdot\ln 1}{2^2}=\dfrac{1}{2}$.

б) $$f'(x)=\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)'-\left(\frac{10^x-1}{10^x+1}\right)'=2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{10^x\ln 10\left(10^x+1\right)-10^x\ln 10\left(10^x-1\right)}{\left(10^x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{2\ln 10\cdot 10^x}{\left(10^x+1\right)^2}.$$

в) $s'(t)=2\left(1\cdot\arcsin\sqrt{t}+t\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\right)=2\arcsin\sqrt{t}+\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}$.

$$s''(t)=\left(s'(t)\right)'=\frac{2}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}+\frac{\dfrac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}}{1-t}=\frac{1}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}+\frac{1-t+t}{2\left(1-t\right)\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}=$$

$$=\frac{2\left(1-t\right)+1}{2\left(1-t\right)\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}=\frac{3-2t}{2\sqrt{t\left(1-t\right)^3}}.$$

Подставляя $t=\dfrac{1}{2}$, находим $s''(t)=\dfrac{3-1}{2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}}=4$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}-\dfrac{10^x\ln 100}{\left(10^x+1\right)^2}$; в) 4.

3(21). Указать на графике функции $y=-4x^2+6x-11$ точку, в которой касательная к графику параллельна прямой $2x-y=1$. Составить уравнения касательной и нормали к графику в этой точке.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в его точке $\left(x_0,y_0\right)$ равен $f'(x_0)$ – значению производной от $f(x)$ в точке x_0. По условию параллельности касательная в точке с абсциссой x_0 имеет такой же угловой коэффициент, как и прямая $2x-y=1 \Leftrightarrow y=2x-1$, т.е. $k=2$. Находим производную: $y'=-8x+6$. Если $\left(x_0,y_0\right)$ – точка касания, то $y'(x_0)=-8x_0+6=2$, откуда $x_0=\dfrac{1}{2}$. Тогда $y_0=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4\cdot\dfrac{1}{4}+6\cdot\dfrac{1}{2}-11=-9$. Таким образом, точка касания – $\left(\dfrac{1}{2},-9\right)$, угловой коэффициент касательной $k=2$. Используя уравнения касательной и нормали в точке $\left(x_0,y_0\right)$

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f(x_0)}\left(x-x_0\right),$$

имеем:

$$y+9=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ – уравнение касательной,}$$

$$y+9=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ – уравнение нормали.}$$

Приводим их к общему виду и записываем

ответ: $\left(\frac{1}{2},-9\right)$ – точка касания. $2x-y-10=0$ – уравнение касательной. $2x+4y+35=0$ – уравнение нормали.

4(22). Продифференцировать функцию, заданную неявно уравнением $y\left(x^2-\sin x\right)+\ln y=0$. Составить уравнение нормали к графику этой функции в точке пересечения с осью Oy.

Решение. По правилу дифференцирования неявной функции дифференцируем данное уравнение как тождество по аргументу x, считая при этом y функцией от x, $\varphi(y)=\ln y$ – сложной функцией от x.

$$y'\left(x^2-\sin x\right)+y\left(x^2-\sin x\right)'+\left(\ln y\right)'=0.$$

$$y'\left(x^2-\sin x\right)+y\left(2x-\cos x\right)+\frac{y'}{y}=0,$$

$$y'\left(x^2-\sin x+\frac{1}{y}\right)=y\left(\cos x-2x\right),$$

откуда

$$y'=\frac{\left(\cos x-2x\right)y^2}{1+y\left(x^2-\sin x\right)}. \qquad (1)$$

Для ответа на второй вопрос задачи найдем ординату точки графика, абсцисса которой $x_0=0$ (по условию). Для этого подставляем $x=0$ в данное уравнение:

$$y\left(0-\sin 0\right)+\ln y=0 \Rightarrow \ln y=0,$$

откуда $y=1$.

Таким образом, точка касания – $\left(0,1\right)$. Из (1) находим производную в этой точке:

$y'\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=\frac{\left(\cos 0-2\cdot 0\right)\cdot 1}{1+\left(0-\sin 0\right)}=\frac{1}{1}=1$. Она равна угловому коэффициенту касательной (аналогично № 4), угловой коэффициент нормали $k_n=-\frac{1}{y'(0)}=-1$. Тогда уравнение нормали

$y-1=-x$ или $x+y-1=0$.

Ответ: $y'=\frac{\left(\cos x-2x\right)y^2}{1+y\left(x^2-\sin x\right)}$; $x+y=1$ – уравнение нормали.

5(23). Найти производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=\left(t+2\right)e^{-t}, \\ y=\operatorname{arctg}\frac{t}{2}. \end{cases}$ Вычислить угловые коэффициенты касательных к графику этой функции в точках пересечения с осями координат.

Решение. Находим производную по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_x = \frac{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right)'_t}{\left((t+2)e^{-t}\right)'_t} = \frac{\dfrac{1}{2\left(1+\dfrac{t^2}{4}\right)}}{e^{-t}-(t+2)e^{-t}} = \frac{-2e^t}{\left(t^2+4\right)(t+1)}. .$$

Найдем значения параметра, при которых кривая пересекает оси координат:

$$\text{ось } Ox: \; y=0 \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{t}{2}=0 \Rightarrow \underline{t=0} \quad (x=2),$$

$$\text{ось } Oy: \; x=0 \Rightarrow (t+2)e^{-t}=0 \Rightarrow \underline{t=-2} \quad \left(y=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}\right).$$

По геометрическому смыслу производной имеем:

$$k_1 = y'\big|_{t=0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$k_2 = y'\big|_{t=-2} = \frac{-2e^{-2}}{(4+4)(-2+1)} = \frac{e^{-2}}{4}.$$

Ответ: $y'_x = \dfrac{-2e^t}{\left(t^2+4\right)(t+1)}$; $k_1 = -\dfrac{1}{2}$ – угловой коэффициент касательной в точке пересечения с осью Ox $(2,0)$; $k_2 = \dfrac{1}{4e^2}$ – в точке пересечения с осью Oy $\left(0,-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6(24). Вычислить с помощью правила Лопиталя предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}}$.

Решение. Выражение под знаком предела представляет неопределенность типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$, причем существуют в некоторой окрестности точки a производные $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$, и предел их отношения – число или $\pm\infty$.

В нашем случае $f(x) = 2x-\sqrt{x+2}-2$, $g(x) = \sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}$.

$$f'(x) = 2-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}.$$

Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to 2} f'(x) = 2-\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2} g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0.$$

По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Ответ: ∞.

7(25). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$

$f(x) = x^2\left(9x^2 - 20x - 48\right)$, $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает свое наибольшее и свое наименьшее значения на этом отрезке (теорема Вейерштрасса) в точках этого отрезка, которые либо являются его концами ($x = a$, $x = b$), либо лежат строго внутри отрезка: $x \in (a,b)$. При этом внутренние точки отрезка должны быть точками экстремума, в которых – для дифференцируемой функции $f(x)$ – выполняется необходимое условие экстремума: $f'(x_0) = 0$ (либо $f'(x_0)$ не существует). Согласно этому, для решения задачи нужно найти все точки $x \in (a,b)$, в которых выполняется необходимое условие экстремума, вычислить значение $f(x)$ в этих точках, затем вычислить $f(a)$ и $f(b)$, и, наконец, среди всех упомянутых значений найти наибольшее $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ и наименьшее $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$. Действуя по этой схеме, находим последовательно:

а) $y' = \left(x^2(9x^2 - 20x - 48)\right)' = 2x\left(9x^2 - 20x - 48\right) + x^2\left(18x - 20\right) =$

$= x\left(18x^2 - 40x - 96 + 18x^2 - 20x\right) = x\left(36x^2 - 60x - 96\right) = 12x\left(3x^2 - 5x - 8\right)$;

б) корни уравнения $y' = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 - 5x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{8}{3} \end{array}\right. \left(3x^2 - 5x - 8 = 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6}\right);$$

в) корень $x_3 = \dfrac{8}{3}$ не принадлежит отрезку $[-2,2]$ $\left(\dfrac{8}{3} > 2\right)$. Корни $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ лежат внутри $[-2,2]$. Вычисляем $f(0) = 0$, $f(-1) = 9 + 20 - 48 = -19$;

г) вычисляем значения функции на концах отрезка:

$f(-2) = 4\left(9 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 48\right) = 4 \cdot 28 = 112$,

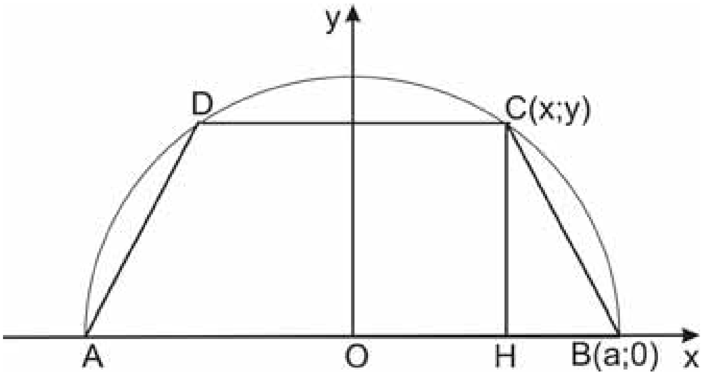
$f(2) = 4\left(9 \cdot 4 - 20 \cdot 2 - 48\right) = 4(-52) = -208$;

д) среди значений $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2)$ выбираем наибольшее $f(-2) = 112$ и наименьшее $f(2) = -208$.

Ответ: $M = \max\limits_{[a,b]} f(x) = 112$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x) = -208$.

8(26). Найти максимальную площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса a, если одно из оснований трапеции совпадает с диаметром полукруга.

Решение. Введем систему координат Oxy как показано на рис. 10. Из геометрических соображений очевидно, что всякая трапеция, удовлетворяющая условию задачи, является равнобочной: $AD = BC$. По формуле площади трапеции имеем:



$$S = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right)\cdot CH =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a + 2x\right)y = (a+x)y.$$

Выразим y из уравнения полуокружности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

тогда

Рис. 10

$$S = S(x) = (a+x)\sqrt{a^2 - x^2}; \quad x \in \left[-a, a\right]. \qquad (1)$$

Получили задачу, аналогичную задаче 7 для функции $S(x)$, $x \in \left[-a, a\right]$, где нужно найти наибольшее значение $M = \max\limits_{[0,a]} S(x)$; очевидно, $m = S(\pm a) = 0$, следовательно, M достигается во внутренней точке отрезка $\left[-a, a\right]$. Найдем эту точку из необходимого условия экстремума $S'(x) = 0$:

$$S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (a+x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2 - (a+x)x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{cases} -2x^2 - ax + a^2 = 0 \\ a^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + ax - a^2 = 0 \\ x \in \left(-a, a\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a \pm \sqrt{9a^2}}{4} \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{2} \\ x = -a \end{array}\right. \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

– точка максимума $S(x)$. Подставляя $x = \dfrac{a}{2}$ в (1), получаем

$$S_{\max} = \left(a + \frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Замечание 1. Формально для доказательства того, что найденная точка $x = \frac{a}{2}$ действительно является точкой максимума, следует применить 1-й достаточный признак экстремума, состоящий в перемене знака $S'(x)$ при переходе через точку $x = \frac{a}{2}$. Это делается по известной схеме с помощью метода интервалов. $S'(x) = -\frac{2\left(x - \frac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

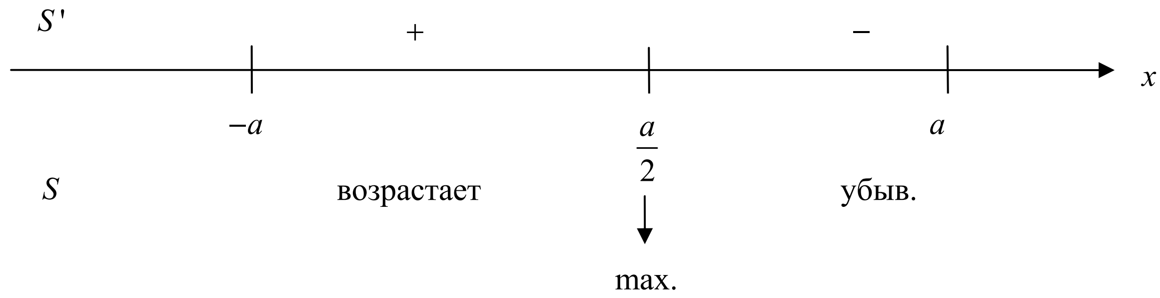


Рис. 11

Однако, в подобного рода задачах, где наличие максимума очевидно по смыслу задачи, последняя процедура может быть опущена.

Замечание 2. Эта задача, как и некоторые другие, может быть решена несколько проще с применением тригонометрии. Запишем параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases},$$

тогда формула (1) примет вид

$$S = (a + a\cos t)a\sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Ясно, что $S_{\min} = S(0) = S(\pi) = 0$, а $S_{\max}$ находится из уравнения $S'(t) = 0$:

$$-a\sin t a\sin t + (a + a\cos t)a\cos t = 0, \Leftrightarrow \ldots$$

$$\ldots \Leftrightarrow \cos 2t + \cos t = 0,$$

решение которого (при $t = [0, \pi]$) есть $t = \frac{\pi}{3}$.

($x = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}$, $y = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $s_{\max} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$)

Замечание 3. Найденная трапеция, как легко заметить, представляет собой половину правильного шестиугольника, вписанного в круг, так как $AD = DC = BC$. Проверьте!

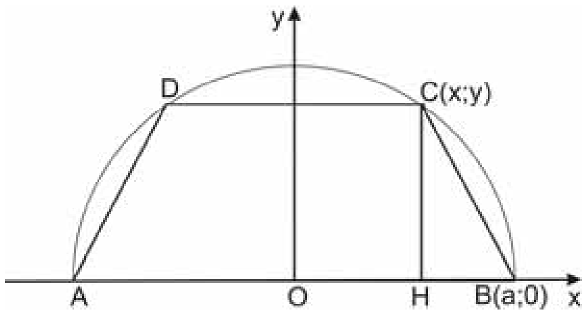


Рис. 12

9(27). Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение.

а) Выясним элементарные свойства функции.

a_1) Область определения: все $x \neq 1 \Leftrightarrow D(y):\ x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

a_2) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $D(y)$ не симметрична относительно $x = 0$

$$\text{(или: } f(-x) = \frac{x^2 - x - 6}{-x - 1},\quad f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x)\text{)}.$$

a_3) Точки пересечения графика с осями:

$$Ox:\quad y = 0,\quad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases},\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

График пересекает ось Ox в точках $(-3, 0)$, $(2, 0)$.

$$Oy:\quad x = 0,\quad y = 6.$$

График пересекает ось Oy в точке $(0, 6)$.

a_4) Непрерывность. Функция – элементарная, поэтому единственная точка разрыва $x = 1 \notin D(y)$. В остальных точках оси Ox функция непрерывна. Так как $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} y = \lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 1} = \pm\infty$, то $x = 1$ – точка разрыва II рода.

a_5) Асимптоты. Из a_4) следует, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота графика. Ищем невертикальные асимптоты $y = kx + b$, которые существуют, если

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - kx\big) = b \end{cases}.$$

В нашей задаче

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 6}{x(x - 1)} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 6}{x - 1} = 2,$$

$\Rightarrow\ y = x + 2$ – наклонная асимптота графика.

б) Исследуем функцию с помощью 1-й производной – промежутки монотонности, экстремумы

$$y' = \left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}\right)' = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2 + x - 6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}.$$

Уравнение $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2} = 0$ не имеет корней, так как $D = 4 - 5 \cdot 4 < 0$.

$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$ при всех x, поэтому $y' > 0$ при всех $x \neq 1$.

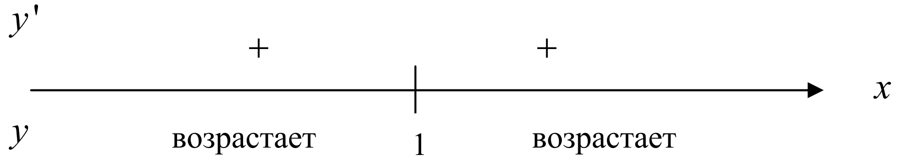


Рис. 13

Следовательно, функция возрастает в каждом из промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ и экстремумов не имеет.

в) Исследуем функцию с помощью 2-й производной – выпуклость, точки перегиба. Найдем

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x + 5)(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-9}{(x-1)^3}.$$

Видим, что $y'' \neq 0$, y'' не определена в точке $x = 1$, где не определена и функция $f(x)$.

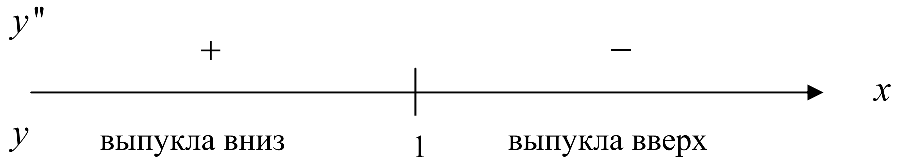


Рис. 14

При $x < 1$ $y'' > 0 \Rightarrow$ кривая $y = f(x)$ выпукла вниз (вогнута).
При $x > 1$ $y'' < 0 \Rightarrow$ $y = f(x)$ выпукла вверх.
По результатам исследования строим график (рис. 15). (Вспомогательные точки: $(3,3)$, $(0,6)$, $\left(-2, \dfrac{4}{3}\right)$, $(-1,3)$).

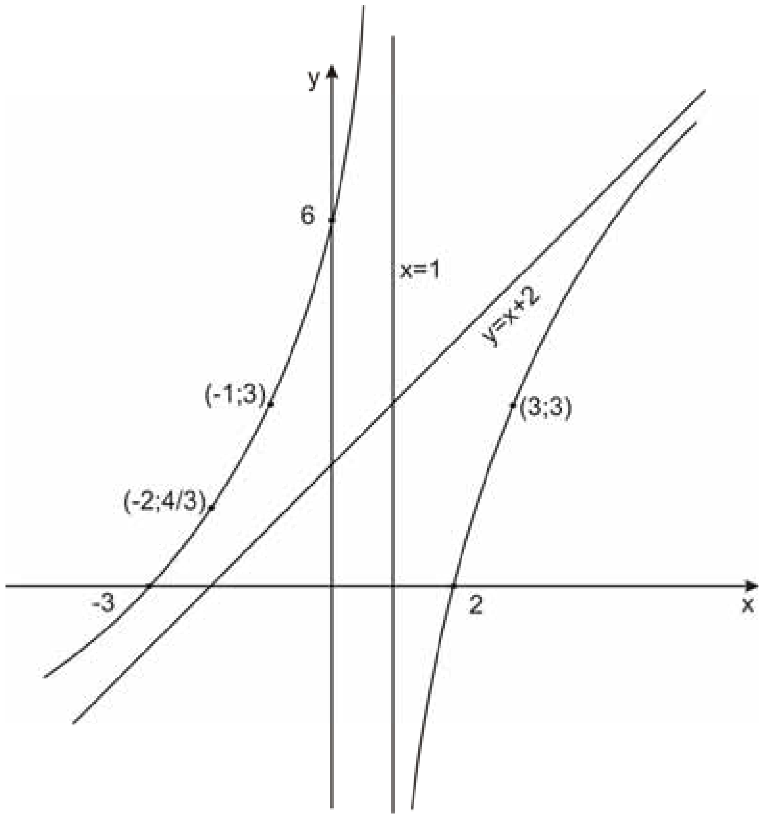


Рис. 15

Ответ: определена при $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Корни $x = -3$, $x = 2$. Асимптоты $x = 1$ и $y = x + 2$. Экстремумов и точек перегиба нет. Возрастает при $x < -1$ и при $x > 1$; при $x < 1$ выпукла вниз, при $x > 1$ выпукла вверх. График – рис. 15.

10(28). То же, что в задаче 9: $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

Решение.

Схема исследования аналогична проведенной в задаче 9.

а) Область определения $\begin{cases} x^2 > 0 \\ |x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$, $D(y): x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

а$_1$) Функция четна: $f(-x) = f(x)$ – это, очевидно, следует из тождеств $(-x)^2 = x^2$, $|-x| = |x|$.

В силу четности дальнейшее исследование ведем только для $x > 0$, так как график функции симметричен относительно оси Oy и поэтому все свойства функции $f(x)$ при $x > 0$ переносятся на интервал $(-\infty, 0)$ также симметричным образом.

а$_2$) При $x > 0$ функция имеет вид

$$y = \frac{\ln x^2}{x} = \frac{2\ln x}{x} \quad (x > 0).$$

$y = 0$ при $\ln x = 0$, $x = 1$ – точка пересечения графика с осью Ox $(1,0)$. С осью Oy график не пересекается: $x \neq 0$. Ясно, что при $x \in (0,1)$ $f(x) < 0$, а при $x > 1$ $f(x) > 0$ (свойства логарифма).

а$_3$) Непрерывность, точки разрыва. $f(x)$ – элементарная функция и поэтому непрерывна всюду в Dy, т.е. при $x \neq 0$. Найдем предел $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\ln x^2}{x} = -\infty \Rightarrow x = 0$ – точка разрыва II рода.

а$_4$) Асимптоты. Из а$_3$) следует, что $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика. Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$ (по правилу Лопиталя) $= 0 \Rightarrow$ прямая $y = 0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота (частный случай наклонной $y = kx + b$ при $k = b = 0$).

б) Исследование с помощью 1-й производной:

$$y' = \left(2\frac{\ln x}{x}\right)' = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}.$$

$y' = 0$ при $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. При $0 < x < e$ $y' > 0$, при $x > e$ $y' < 0$

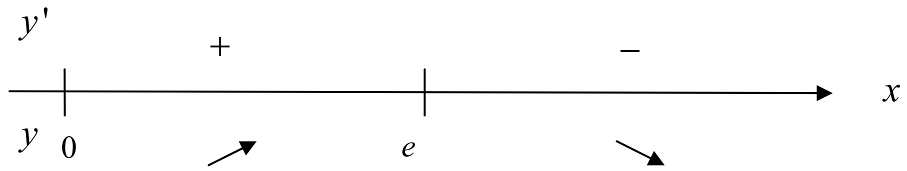


Рис. 16

Значит, $f(x)$ при $x \in (0, e)$ возрастает, при $x \in (e, +\infty)$ убывает, а $x = e$ – точка максимума; $f_{\max} = y(e) = \dfrac{2}{e} \approx 0,75$.

в) Исследование с помощью 2-й производной.

$$y'' = \left(\frac{2(1 - \ln x)}{x^2}\right)' = 2 \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\left(2\ln x - 3\right)}{x^3}.$$

$$y'' = 0 \text{ при } \ln x = \frac{3}{2},\ x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \approx 4,5.$$

При $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ $y'' < 0$, при $x > e^{\frac{3}{2}}$ $y'' > 0$.

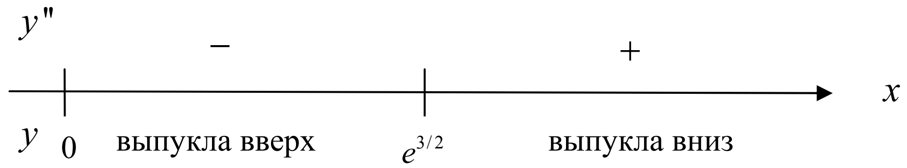


Рис. 17

$x = e^{\frac{3}{2}}$ – абсцисса точки перегиба, точка перегиба $\left(e^{\frac{3}{2}}, 3e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

По результатам исследования строим график (рис. 18).

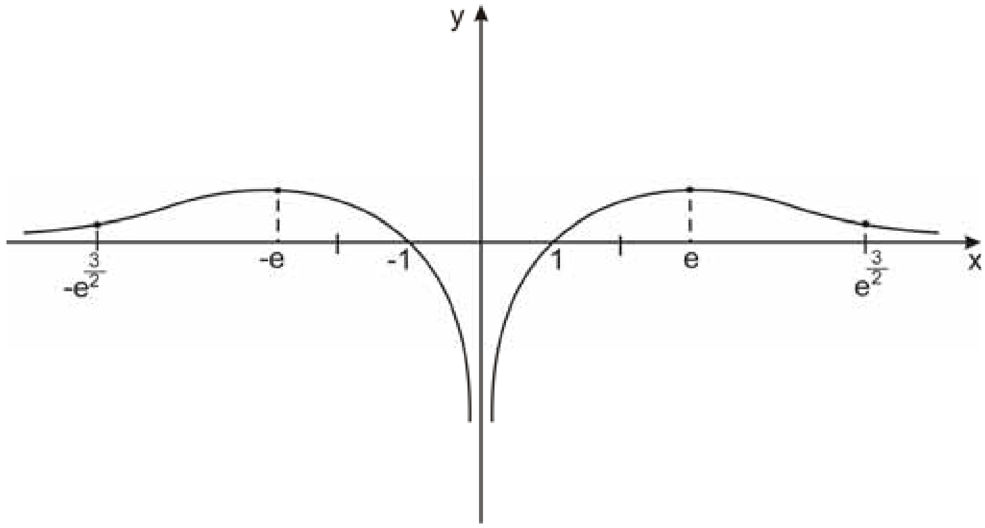


Рис. 18

Ответ: определена при всех $x \neq 0$, четна. Корни: $x = \pm 1$. Асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. Экстремумы: $x = \pm e$ – точки максимума, $y(\pm e) = \frac{2}{e}$. Возрастающая на промежутках $(-\infty, -e)$ и $(0, e)$, убывающая на промежутках $(-e, 0)$ и $(e, +\infty)$. Точки перегиба: $\left(-e^{\frac{3}{2}}, 3e^{-\frac{3}{2}}\right)$ и $\left(e^{\frac{3}{2}}, 3e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Выпукла вверх при $x \in \left(-e^{\frac{3}{2}}, 0\right)$ и $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, при остальных x – выпукла вниз (вогнута). График – рис. 18.

Замечания. Можно констатировать, что при выполнении этой контрольной работы (как и работы № 4) грубые ошибки встречаются заметно реже, чем в работах № 1 и 2. Большинство ошибок имеют причиной слабую технику дифференцирования, что связано с недостатком упражнений формального характера. Ограничимся лишь одним примером: производная функции вроде $\frac{3\sin^2 x}{10x}$ вычисляется так:

$$\left(\frac{3\sin^2 x}{10x}\right)' = \frac{\left(3\sin^2 x\right)' 10x - 3\sin^2 x\left(10x\right)'}{100x^2} = \frac{3'\sin^2 x + 3\left(\sin^2 x\right)' - 3\sin^2 x\left(10'x + 10x'\right)}{100x^2} = \ldots$$

и т.п., вместо само собой разумеющего вынесения множителя $\frac{3}{10}$ за знак производной $\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)'$ (свойство $\left(Cu\left(x\right)\right)' = Cu'$). Реже встречаются ошибки вследствие непонимания правила дифференцирования сложной функции; при дифференцировании неявной функции, заданной уравнением $F\left(x, y\right) = 0$ некоторые студенты применяют формулу $y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, механически списывая ее из учебника для II курса, не имея представления, что означает вообще символ в правой части. Наконец, почти общим местом остается небрежное оформление решения – перенос знака умножения, черты дроби на новую строку, неряшливая запись выкладок и ответов, отсутствие очевидных и необходимых упрощений и т.п., вплоть до «построения» графиков «от руки», скверно очищенным карандашом, без соблюдения масштаба и даже порой без линейки (для проведения осей и асимптот). Но все же в целом процент зачтенных – с первой попытки – работ оказывается здесь существенно выше, чем в первом семестре.